Erinnerung:

Sei K ein Körper mit einer *Norm* $|\ \ |$, das heisst, einer Abbildung

$$|\ \ |\colon\ K \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}, \quad x \mapsto |x|$$

mit den folgenden Eigenschaften für alle $x, y \in K$:

$$\begin{aligned} |x| = 0 \ &\Leftrightarrow\ x = 0 && \text{(Separiertheit)} \\ |x \cdot y| \ &=\ |x| \cdot |y| && \text{(Multiplikativität)} \\ |x + y| \ &\leqslant\ |x| + |y| && \text{(Dreiecksungleichung)} \end{aligned}$$

Eine *Norm* auf einem K-Vektorraum V ist eine Abbildung

$$\|\ \ \|\colon\ V \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}, \quad v \mapsto \|v\|$$

mit den folgenden Eigenschaften für alle $v, v' \in V$ und $x \in K$:

$$\begin{aligned} \|v\| = 0 \ &\Leftrightarrow\ v = 0 && \text{(Separiertheit)} \\ \|x \cdot v\| \ &=\ |x| \cdot \|v\| && \text{(Multiplikativität)} \\ \|v + v'\| \ &\leqslant\ \|v\| + \|v'\| && \text{(Dreiecksungleichung)} \end{aligned}$$

Ein Vektorraum zusammen mit einer Norm heisst ein *normierter Vektorraum* $(V, \|\ \ \|)$.

Bsp.: $(K, |\cdot|)$ ist normierter K-Vektorraum.

Proposition: Für jede Norm $\|\ \|$ und alle $v, w \in V$ gilt $\big|\,\|v\| - \|w\|\,\big| \leqslant \|v - w\|$.

Bew.: $\|v\| = \|(v-w)+w\| \leq \|v-w\| + \|w\| \Rightarrow \|v\| - \|w\| \leq \|v-w\|$.

$$\left.\begin{array}{l} |-1|^2 = |(-1)^2| = |1| > 0 \\ |1|^2 = |1^2| = |1| \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \boxed{|1| = 1} \\ |-1| > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{|-1| = 1}$$

Vertausche v, w

$$\|w\| - \|v\| \leq \|w-v\| = \|-(v-w)\| = |-1| \cdot \|v-w\| = \|v-w\|$$

$$\boxed{\forall v \in V: \ \|-v\| = \|v\|}$$

$$\Rightarrow \big|\,\|v\| - \|w\|\,\big| \leq \|v-w\|.$$

qed.

Definition: Zwei Normen $\|\ \|$ und $\|\ \|'$ auf V heissen *äquivalent*, wenn reelle Zahlen $c, c' > 0$ existieren mit

$$\forall\, v \in V: \quad c \cdot \|v\| \ \leqslant\ \|v\|' \ \leqslant\ c' \cdot \|v\|.$$

Proposition: Dies ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Normen auf V.

Bew.: $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|$ mit $c = c' = 1$. Reflexiv.

Symmetrie: c, c' wie oben $\Rightarrow \forall v \in V: \ \frac{1}{c'} \cdot \|v\|' \leq \|v\| \leq \frac{1}{c} \cdot \|v\|'$

Transitiv: c, c' wie oben

$d, d' > 0$ so dass $\forall v \in V: \quad d \cdot \|v\|' \leq \|v\|'' \leq d' \cdot \|v\|'$

$$\Rightarrow \quad cd \cdot \|v\| \leq \|v\|'' \leq d' c' \cdot \|v\|.$$

qed.

Beispiel: Für jedes $p \in \mathbb{R}^{\geqslant 1} \cup \{\infty\}$ ist die ℓ_p-Norm auf K^n definiert durch

$$\boxed{|(x_1, \ldots, x_n)|_p := \begin{cases} \left(|x_1|^p + \ldots |x_n|^p\right)^{1/p} & \text{falls } p < \infty, \\ \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} & \text{falls } p = \infty. \end{cases}}$$

Maximumsnorm.

$$\max\{|\lambda x_1|, \ldots, |\lambda x_n|\} = \max\{|\lambda| \cdot |x_1|, \ldots, |\lambda| \cdot |x_n|\}$$
$$= |\lambda| \cdot \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}.$$

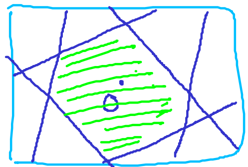
Beispiel: Seien V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und E, E' endliche Erzeugendensysteme des Dualraums $V^\vee$. Dann sind

$$\|v\|_{1,E} := \textstyle\sum_{\ell \in E} |\ell(v)| \qquad \text{und}$$
$$\|v\|_{\infty,E'} := \max\{|\ell(v)| : \ell \in E'\}$$

Normen auf V. Ein klassischer Satz zur Geometrie der konvexen Polyeder besagt, dass sich jede Norm der ersten Form in der zweiten Form schreiben lässt und umgekehrt.

Bem.: $\|\cdot\|$ Norm auf V $\Longrightarrow$ $B_1 := \{v \in V : \|v\| \leq 1\}$. abgeschlossene Einheitskugel.

Für $\|\cdot\|_{\infty,E'}$ ist $B_1 = \{v \in V : \forall \ell \in E' : |\ell(v)| \leq 1\}$.



Satz: Je zwei Normen auf einem endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum sind äquivalent.

$\mathbb{R}$ mit Standardnorm

Bew.: Wähle Isom. $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} V$. $\rightsquigarrow$ oBdA $V = \mathbb{R}^n$.

Sei $|\cdot|$ die euklid. Norm auf $\mathbb{R}^n$, $\|\cdot\|$ eine beliebige ... $\Big\}$ $\Rightarrow$ Genügt zu zeigen $\|\cdot\| \sim |\cdot|$.

$\boxed{n = 0 \Rightarrow \|\cdot\| = |\cdot| \text{ fertig. Sei also } n > 0.}$

$e_1, \dots, e_n$ Standardbasis von $\mathbb{R}^n$

$\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i e_i$

$$\|\underline{x}\| = \Big\|\sum_{i=1}^n x_i e_i\Big\| \leq \sum_{i=1}^n \|x_i e_i\| = \sum_{i=1}^n \underbrace{|x_i|}_{\leq |\underline{x}|} \cdot \|e_i\| \leq \underbrace{\Big(\sum_{i=1}^n \|e_i\|\Big)}_{=: c'} \cdot |\underline{x}|.$$

Dann folgt: $\forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$: $\|\underline{x} - \underline{y}\| \leq c' |\underline{x} - \underline{y}|$

$\Rightarrow$ die Funktion $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{\geq 0}$, $\underline{x} \mapsto \|\underline{x}\|$ ist Lipschitzstetig mit der Konstanten c'.

Sei $S^{n-1} := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : |\underline{x}| = 1\}$ Einheits-Sphäre. Kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.

$\Rightarrow$ Existiert Minimum, d.h. $\exists c \in \mathbb{R}$: $\forall \underline{x} \in S^{n-1}$: $\|\underline{x}\| \geq c$,
$\exists \underline{x} \in S^{n-1}$: $\|\underline{x}\| = c$

Separiertheit von $\|\cdot\|$ $\Rightarrow$ $c > 0$.

$$\Rightarrow \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n: \quad \underline{x} \neq 0 \Rightarrow \frac{\underline{x}}{|\underline{x}|} \in S^{n-1} \Rightarrow \frac{\|\underline{x}\|}{|\underline{x}|} = \Big\|\frac{\underline{x}}{|\underline{x}|}\Big\| \geq c \Rightarrow c \cdot |\underline{x}| \leq \|\underline{x}\|.$$

gilt auch für $\underline{x} = 0$. qed.

10.3 Bilinearformen

Definition: Eine *Bilinearform* auf einem K-Vektorraum V ist eine Abbildung

$$\beta\colon\ V \times V \to K,\ (v,w) \mapsto \beta(v,w)$$

so dass für alle $v, v', w, w' \in V$ und $\lambda \in K$ gilt:

$$\begin{aligned}
\beta(v, w+w') &= \beta(v,w) + \beta(v,w') && \text{(rechts additiv)}\\
\beta(v+v', w) &= \beta(v,w) + \beta(v',w) && \text{(links additiv)}\\
\beta(v, \lambda w) &= \lambda\beta(v,w) && \text{(rechts homogen)}\\
\beta(\lambda v, w) &= \lambda\beta(v,w) && \text{(links homogen)}
\end{aligned}$$

$\cancel{\beta(v+v', w+w') = \beta(v,w) + \beta(v',w')}$

$\cancel{\beta(\lambda v, \lambda w) = \lambda \beta(v,w)}$

$\cancel{V \oplus V \to K}$ ~~linear.~~

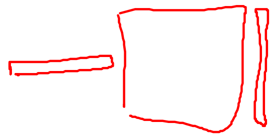
Eine Bilinearform β heisst *symmetrisch,* wenn zusätzlich für alle $v, w \in V$ gilt

$$\beta(v,w) = \beta(w,v).$$

Definition: Eine quadratische Matrix A mit $A = A^T$ heisst *symmetrisch*.

Beispiel: Für jede $n \times n$-Matrix A über K ist die folgende Abbildung eine Bilinearform:

$$\beta_A\colon\; K^n \times K^n \to K,\;\; (x, y) \mapsto x^T A\, y.$$



Spaltenvektoren

Diese ist symmetrisch genau dann, wenn A symmetrisch ist.

$$(x+x')^T \cdot Ay = (x^T + x'^T)Ay = x^TAy + x'^TAy$$

etc.

$$\beta_A(y,x) = y^TAx = (y^TAx)^T = x^T \cdot A^T \cdot y^{TT} = x^TA^Ty = \beta_{A^T}(x,y)$$

Also gilt A symmetrisch $\Rightarrow$ β_A symmetrisch.

$$A = (a_{ij})_{i,j} \Rightarrow \underbrace{e_i^T \cdot A \cdot e_j}_{\beta_A(e_i,e_j)} = a_{ij}, \qquad \underbrace{e_j^T A e_i}_{\beta_A(e_j,e_i)} = a_{ji}$$

$\Rightarrow$ [β_A symmetrisch $\Rightarrow \forall i,j : a_{ij} = a_{ji} \Rightarrow A$ sym.]

10.4 Darstellungsmatrix

Sei $B = (v_1, \dots, v_n)$ eine geordnete Basis von V.

Definition: Die *Darstellungsmatrix* einer Bilinearform β auf V bezüglich B ist die $n \times n$-Matrix

$$\boxed{[\beta]_B \;:=\; \big(\beta(v_i, v_j)\big)_{i,j=1,\dots,n}.}$$

$$\sum_{i=1}^n x_i v_i \;\longleftarrow\!\shortmid\; \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{tikzcd}
V \times V \arrow[r, "\beta"] & K \\
K^n \times K^n \arrow[u, "\varphi_B \times \varphi_B", "\cong"'] \arrow[ur, "\beta \circ (\varphi_B \times \varphi_B)"']
\end{tikzcd}$$

Bilinearform

Proposition: Für je zwei Vektoren $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ und $y = (y_1, \dots, y_n)^T$ in K^n setze $v := \sum_i x_i v_i$ und $w := \sum_j y_j v_j$ in V. Mit $A := [\beta]_B$ gilt dann

$$\boxed{\beta(v, w) = x^T A y.}$$

$$(x_1 \cdots x_n)\,\big(\beta(v_i, v_j)\big)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Bew.: $\beta(v,w) = \beta\big(\sum_i x_i v_i, \sum_j y_j v_j\big) = \sum_i x_i \cdot \beta\big(v_i, \sum_j y_j v_j\big) = \sum_i x_i \sum_j y_j \, \beta(v_i, v_j)$

$= \sum_{i,j} x_i \, \beta(v_i, v_j) \cdot y_j = x^T A y.$

qed.

Proposition: Für jede $n \times n$-Matrix A über K existiert genau eine Bilinearform β auf V mit $[\beta]_B = A$.

Nämlich $\beta_A \circ (\varphi_B^{-1} \times \varphi_B^{-1})$. (Rechnung zurück).

Proposition: Eine Bilinearform auf V ist symmetrisch genau dann, wenn ihre Darstellungsmatrix bezüglich B symmetrisch ist.

Bew.: β symmetrisch $\Longleftrightarrow$ $\underbrace{\beta \circ (\varphi_B \times \varphi_B)}_{\beta_A}$ symmetrisch $\Longleftrightarrow$ A symmetrisch. qed.

Proposition: Die Darstellungsmatrix von β bezüglich jeder weiteren geordneten Basis B' von V ist

$$\boxed{[\beta]_{B'} \;=\; {}_B[\mathrm{id}_V]_{B'}^T \cdot [\beta]_B \cdot {}_B[\mathrm{id}_V]_{B'}}$$

Beweisidee: A $n \times n$-Matrix, B invertierbare $n \times n$-Matrix

$$\begin{tikzcd} K^n \times K^n \arrow[r, "\beta_A"] & K \\ K^n \times K^n \arrow[u, "B \times B"] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} \beta_A(Bx, By) &= (Bx)^T \cdot A \cdot (By) \\ &= x^T \cdot B^T \cdot A \cdot By \\ &= x^T \cdot (B^T A B) \cdot y \\ &= \beta_{B^T A B}(x, y) \end{aligned}$$

Basis: $B = (v_1, \dots, v_n)$, $B' = (v_1', \dots, v_n')$

$${}_B[id_V]_{B'} = (u_{ij})_{i,j=1..n}$$

$\forall j: \; v_j' = \sum_i u_{ij} v_i$

$$\Rightarrow \quad [\beta]_B = (\beta(v_i, v_j))_{i,j}.$$

$$[\beta]_{B'} = (\beta(v_l', v_j'))_{l,j} = \Big(\beta\Big(\sum_k u_{kl} v_k, \sum_i u_{ij} v_i\Big)\Big)_{l,j} = \Big(\sum_k u_{kl}\, \beta\Big(v_k, \sum_i u_{ij} v_i\Big)\Big)_{l,j}$$

$$= \Big(\sum_k u_{kl} \sum_i u_{ij}\, \beta(v_k, v_i)\Big)_{l,j} = \Big(\sum_{k,i} u_{kl}\, \beta(v_k, v_i) \cdot u_{ij}\Big)_{l,j}$$

$$= \underbrace{(u_{kl})_{l,k}}_{=\ {}_B[id_V]_{B'}^T} \cdot \underbrace{(\beta(v_k, v_i))_{k,i}}_{=\ [\beta]_B} \cdot \underbrace{(u_{ij})_{i,j}}_{=\ {}_B[id_V]_{B'}}$$

$$= {}_B[id_V]_{B'}^T \cdot [\beta]_B \cdot {}_B[id_V]_{B'}$$

qed.

10.5 Reelle Skalarprodukte

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Definition: Eine symmetrische Bilinearform

$$\langle\ ,\ \rangle\colon\ V \times V \to \mathbb{R},\ (v,w) \mapsto \langle v,w\rangle$$

$< x , y >$

\langle

\rangle

heisst *positiv definit*, wenn zusätzlich gilt:

$$\forall\, v \in V \smallsetminus \{0\}\colon\ \langle v,v\rangle > 0.$$

Der *Betrag* eines Vektors $v \in V$ bezüglich $\langle\ ,\ \rangle$ ist dann die Zahl

$$\|v\| \ := \ \sqrt{\langle v,v\rangle} \ \in \ \mathbb{R}^{\geqslant 0}.$$

Definition: Eine positiv definite symmetrische Bilinearform heisst ein *Skalarprodukt.* Ein $\mathbb{R}$-Vektorraum zusammen mit einem Skalarprodukt heisst *euklidischer Vektorraum* $(V,\langle\ ,\ \rangle)$.

Definition: Das *Standard-Skalarprodukt auf* $\mathbb{R}^n$ ist für $x = (x_i)_i$ und $y = (y_i)_i$ gegeben durch

$$\langle x,y\rangle \ := \ x^T y \ = \ x_1y_1 + \ldots + x_ny_n.$$

Darstellungsmatrix I_n

$<x,x> = x_1^2 + \ldots + x_n^2$

Der zugehörige Betrag ist die ℓ_2-Norm

$$\|x\| \ := \ \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$